```
   _________________ ____________
  /  _____/\_   ___ \\_   _____/
 /   \  ___/    \  \/ |    __)
 \    \_\  \     \____|     \
  \______  /\______  /\___  /
         \/        \/     \/
 The German Computer Freaks
  www.gcf.de    Since 1997
```

```
                                                                        /\
                                                                       /  \
______________________________________________________________________/ # /
4-dimensionale Objekte                                        Science \  /
(c) Roger "oCaS" Zenner [ocas@freakx.net] , 17.11.02                   \/
```

Inhalt

0. Vorwort

Vor kurzem unterhielt ich mich mit einem Freund, über genau das Thema, über das ich an dieser Stelle schreiben möchte. Wir fanden heraus, dass man zwar zu den einzelnen Unterpunkten dieses Themas im Internet recht viele Informationen findet, allerdings wenig Prägnantes, Informatives und zugleich Zusammenbindendes.

Im folgenden Paper zum Thema 4-dimensionale Objekte möchte ich hauptsächlich auf die Konstruktion und die Herleitungen der Körper eingehen. Ich hoffe weitestgehend auf die tiefere Mathematik verzichten zu können, die sich hinter diesem Thema verbirgt, wobei ich allerdings nicht garantieren kann, dass ich ganz ohne sie auskomme.

Weiterhin verwende ich in diesem Text sehr viele Grafiken, zum Teil aus dem Internet mit Quellenangabe, zum Teil selbst erstellt. Grafiken und Bilder sind bei einem so komplexen Thema meiner Meinung nach absolut unerlässlich. Ich hätte den Text auch ganz ohne grafische Mittel gestalten können, wobei ich mir allerdings denke, dass man a) weder die Körper wirklich versteht b) noch viel Spaß bei einem dann sehr trockenen Text haben wird.

Ich hoffe dennoch, dass ich dieses Paper -ob mit oder ohne Mathematik- so gestaltet habe, dass ihr Leser dort draußen nach dem Lesen vielleicht ein wenig vertrauter mit dieser doch etwas seltsamen Materie seid und -bzw. ‘oder’, falls das andere nicht der Fall sein sollte- euch das Lesen des Textes wenigstens ein bisschen Spaß und ein paar unterhaltsame Minuten gebracht hat.

Somit wünsche ich nun viel Spaß beim Lesen (denn ich hatte ihn beim Schreiben) dieses Textes.

-der Autor

1. Hinführung

Wir beschäftigen uns in diesem Paper also wie bereits geschrieben mit 4-dimensionalen Objekten. Dies setzt voraus, dass wir wissen, dass wir nichts wissen. Oder besser: Dass wir nichts sehen! 4-dimensionale Objekte befinden sich -wie ihr Name sagt- nicht wie wir in 3, sondern eben in 4 Dimensionen. Daraus ergibt sich ein kleiner Nachteil: Wir können diese Objekte eben nicht wie "gewöhnliche" 3-dimensionale Körper wahrnehmen. Wir könnten nur jenen Teil sehen (wenn es diese hypothetischen Gebilde gäbe), welcher sich in unseren 3 Raumdimensionen befindet.

Dies klingt ein wenig sehr stockend, deshalb möchte ich es an einem vielzitierten Beispiel erläutern: Das Beispiel von Flachland:

Stellt euch eine Welt vor, die nur auf den 2 Papierebenen existiert, zum Beispiel 2 Männer. Was wäre, wenn Mann A nun an Mann B vorbeigehen möchte? In unserer 3-dimensionalen Welt wäre dies kein Problem: Er geht einfach vor oder hinter der anderen Person vorbei. Dies ist jedoch in dieser Welt nicht möglich. Um an ihm "vorbei"zukommen, müsste Mann A _über_ Mann B steigen, da keine Tiefendimension vorhanden ist, die er benutzen könnte, um vorne oder hinter ihm vorbeizugehen. Soweit verstanden? Wunderbar!

Nun stellen wir uns uns noch als "Überwesen" vor, die in diese Welt eingreifen könnten. Was würden diese sogenannten Flachländer sehen, wenn wir uns einen von ihnen nehmen würden und ihn einfach in unsere Welt zerren würden? Wie ihr euch sicher schon denken könnt: Der Flachländer verschwindet einfach. Aber wieso? Die Antwort läuft mal wieder auf das gleiche Problem hinaus wie im vorherigen Beispiel: Es gibt keine Tiefendimension. Wir würden als den Flachländer faktisch in eine Dimension mitnehmen, die alle anderen Flachländer nicht sehen können, was -mit anderen Worten- eben darauf hinausläuft dass er auf einmal verschwindet.

Um dieses Spiel noch weiterzutreiben: Was würde denn der Flachländer in unseren 3 Dimensionen sehen? Fast nichts! Oder sehr viel, wie man es nimmt. Nehmen wir hier als Beispiel eine hohle Kugel, die wir an dem Kopf des Flachländers vorbei laufen lassen:
Zunächst würde er einen Punkt sehen. Dieser Punkt würde sehr schnell zu einem größeren Kreis werden, der hohl wäre - solange bis die Kugel weiterrollt. Der Kreis würde dann wieder kleiner, zu einem Punkt werden und schließlich ganz verschwinden - und der Mann würde sehr verwirrt dreinschauen (wie auch wir das würden wenn so etwas vor unseren Augen erscheint und wieder verschwindet, ohne eine Spur zu hinterlassen).

Und noch ein wenig weiter: Käme dieser Flachländer nun zurück nach Flachland in seine altbekannten 2 Dimensionen - was könnte er berichten? Er könnte genau von solchen Dingen berichten, von denen er SEHR viele sehen würde. Er würde sagen, dass er dauernd wechselnde Farben gesehen hat, Objekte erschienen und ins Nichts verschwanden, dass er sich durch diesen Umstand bedingt selbst sich nicht traute, sich zu bewegen - und dann würde er eingesperrt werden in eine geschlossene Anstalt. (um den "Realismus" ein wenig zu fördern)

Und nun: Wozu das alles?

Dieses Beispiel soll verdeutlichen, in welcher Situation wir uns gegenüber der sogenannten 4. Raumdimension befinden. Wir können faktisch nichts erkennen - und das was wir sehen, wäre sinnlos und für uns unverständlich. Dennoch gibt es Modelle, die in der Lage sind, solche Dinge zu "simulieren". Einige Beispiele werden sie in diesem Text auch finden, was die Verständlichkeit unter Umständen auch erleichtern kann (und hoffentlich nicht erschwert). Doch nun wollen wir uns nicht mehr mit 2, sondern endgültig mit 4 Dimensionen beschäftigen:

2. Überführung von Körpern

Auch wenn ich nun versprochen habe, mich in 4 Dimensionen zu bewegen, so muss ich dennoch einen kurzen Abstecher durch die restlichen 3 machen: Die Überführung voneinem Körper von Dimension x in die Dimension x+1.

Beginnen wir am Besten bei Dimension 0. 0? Ja, selbst die gibt es: Sie besteht aus einem einfachen Punkt.

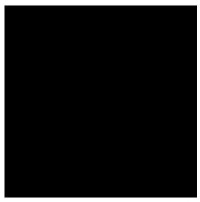
Abb. 2.1: Ein Punkt

Dieser Punkt muss, wenn er das Kriterium erfüllen will, nur in der nullten Dimension zu existeren, keinerlei Ausdehnung haben. Das heißt, er muss unendlich klein sein, eben ein mathematischer Punkt (z.B. in einem Koordinatensystem). Nun kann man diesen Punkt aus Dimension 0 in ein Objekt der Dimension 1 (Breite) überführen. Dazu muss man den Punkt strecken, und zwar in eben diese “neue” Dimension: Wir erhalten eine Linie.

Abb 2.2: Eine Linie oder Strecke

Somit haben wir bereits ein 1-dimensionales Objekt, eine Linie. Wenn man dieses Objekt nun wiederum in einer weiteren hinzukommenden Dimension (Höhe) streckt, so erhält man... korrekt, ein Quadrat.

Abb. 2.3: Ein Quadrat



In den nächsten Darstellungen werde ich dieses Quadrat zur besseren Übersicht allerdings hohl (d.h. mehr oder minder durchsichtig) gestalten. Zu erwähnen sei bei diesen Überführungen, dass man dabei keine Dimension auslassen kann. So ist es z.B. nicht möglich, aus einem Punkt ein Quadrat zu machen, indem ich es in eine Richtung erweitere. Selbst wenn man diesen Punkt in 2 Richtungen ausdehnt, so hat man kein Quadrat. Doch nun weiter, denn immerhin folgen nach dem Quadrat weitere Körper, wie zum Beispiel der Quader. Dazu stellen wir uns folgende einfache Frage: Was ist ein Quader (bzw Würfel bei gleicher Seitenlänge)? Die Antwort ist sicher jedem klar, aber nicht so einfach zu formulieren, deshalb nehmen wir auch hier unsere Überführungsmethode. Wir haben nun eine Linie (1-dimensional) in ein Quadrat (2-dimensional) überführt, nun folgt der nächste Schritt. Auch hier erweitern wir unser vorhandenes Objekt wieder um eine neue Dimension, die Dritte (die man hier auch als Z-Achse bezeichnen könnte).

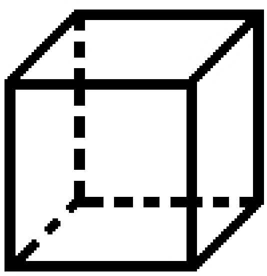


Abb. 2.3: Ein Würfel

Der Quader ist in diesem Bild nun halb-transparent dargestellt, d.h. Linien die davon nicht zu sehen sind, sind gestrichelt zu sehen.

3. Der Hyperkubus I

Nun kommt der komplexere Teil, denn ich habe ein 3-dimensionales Objekt und möchte daraus ein 3+1-dimensionales, sprich 4-dimensionales machen. Nur bringt uns unser Verstand hier an die besagte Grenze: Es ist uns nicht möglich uns eine weitere Raumdimension vorzustellen. Nun betreten wir aber eben diesen Raum. Dabei sei darauf hingewiesen, dass ich einige Grafiken und Bilder im Internet zusammengesucht habe, da dort sehr brauchbare Darstellungen existieren. Die Quelle der Bilder wird selbstverständlich angegeben. Aber weiter im Text. Ein solches in 4 Dimensionen gestrecktes Gebilde wäre für uns so wahrnehmbar:

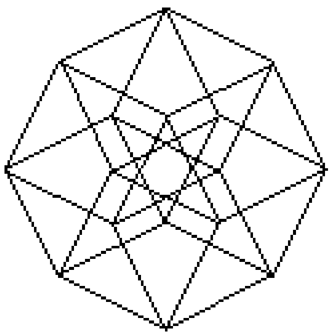


Abb. 2.3: Hyperkubus in der Seitenansicht

Quelle: http://www.mathematische-basteleien.de/hyperkubus.htm

Dies ist ein “4-dimensionaler Würfel”, der auch Hyperkubus oder Tesseract genannt wird. Der Begriff “4-dimensionaler Würfel” ist in sofern falsch, da ein Würfel ein 3-dimensionaler Körper ist. Deshalb spreche ich im weiteren Verlauf, auch wenn es ein wenig gewöhnungsbedürftig sein mag, von dem Hyperkubus.

Wie kann ich mir einen solchen Hyperkubus nun vorstellen?

Die Abbildung ist, obwohl sie recht einfach ist, doch eher undurchschaubar. Um auch dies ein wenig besser verstehen zu können müssen wir das Kapitel “Hyperkubus” noch einmal kurz unterbrechen um zum Thema “Faltungen” zu kommen - keine Sorge , danach geht es munter weiter.

4. Faltungen im Raum

Um den Aufbau des Hyperkubus zu verstehen, schauen wir uns eine andere Möglichkeit an, um Körper zu erstellen. Wie wir bereits wissen, können wir einen Punkt durch Streckung in eine Linie überführen und diese wiederum durch Streckung in ein Quadrat bzw. Viereck. Nun kann man allerdings einen Würfel auch noch auf anderem Wege als durch Streckung erzeugen. Diese Methode dürfte jedem von euch, der irgendwann mal einen Kindergarten besucht hat, geläufig sein: Mit einer Schablone. Hier ist einmal eine solche Falt-Schablone:

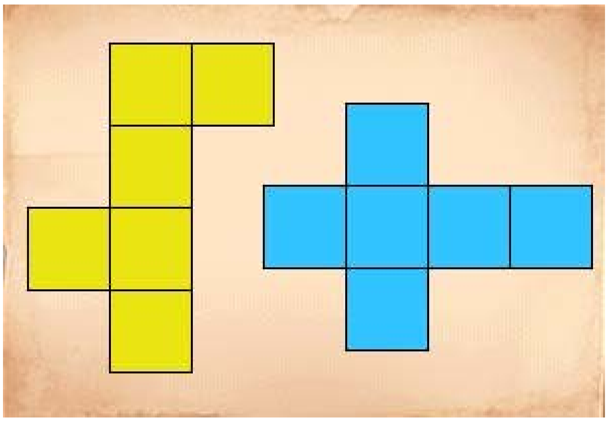


Abb. 4.1: Faltblatt eines Würfels

Quelle: http://www.tim7.de/images/wuerfel2.jpg

Hier sind 2 solcher Schablonen abgebildet (insgesamt gibt es 11 Möglichkeiten, wer sich einmal aus Spaß daran versuchen will, dem sei hiermit die Gelegenheit dazu gegeben); aus beiden kann man einen Würfel falten. Dies dürfte wohl 99% aller Leser bekannt sein, deshalb gehe ich an dieser Stelle auf die Technik *wie* man falten muss nicht weiter ein.

Wie man erkennen kann besteht diese Schablone aus 6 2-dimensionalen Objekten. Durch Falten in eine andere Raumebende kann man ein 3-dimensionales Gebilde erstellen. Ähnlich verhält es sich mit dem Hyperkubus: Man kann eine Schablone anfertigen, die -wenn man sie im vierten Raum falten könnte- bei Faltung ein neues, höherdimensionales Objekt, eben den Hyperkubus, ergibt. Eine solche Schablone muss nun eben aus 3-dimensionalen Objekten bestehen. Um die Spannung nicht zu sehr ansteigen zu lassen (denn wir lesen ja kein Science-Fiction Buch sondern wissenschaftliche Erkenntnisse) möchte ich an dieser Stelle sagen, dass man insgesamt 8 Würfel bräuchte, um einen Hyperkubus zu falten.

Die Zahl 8 kann man dabei über eine Formel errechnen, die ich hier zwar nicht darstellen will, allerdings möchte ich die Folgen minimal erläutern; einige wenige Informationen eben (da ich ja versprochen habe in dem Text so wenig Mathematik wie möglich zu verwenden).

Uns bekannte n-dimensionale Gebilde haben folgende Eigenschaften, die leicht zu überprüfen sind:

Dimension	Ecken	Kanten	Quadrate	Würfel
1	2	1	0	0
2	4	4	1	0
3	8	12	6	1

Abb. 4.2: Eigenschaften n-dimensionaler Würfel

Diese Werte lassen sich über mathematische Formeln errechnen, die ich hier aber nicht näher erläutern möchte. Seit einiger Zeit kann man sich die Formeln und Beweise z.B. auf folgenden Seiten ansehen:

- http://www.mathematische-basteleien.de/hyperkubus.htm
- http://www.tordata.se/streun/math/dim4/achtzlbw.htm

Diese mathematischen Fakten sind für unser Thema aber eher weniger von Bedeutung. Was wichtig ist, ist, dass man für den Hyperkubus eben dadurch berechnen kann wie viele Flächen bzw. Würfel man benötigt - eben 8.

Das Gebilde, was man zum Falten benötigt ist somit ein “ausgefalteter” Hyperkubus, welcher sich dann Tesseract nennt. Und so sieht er dann aus:

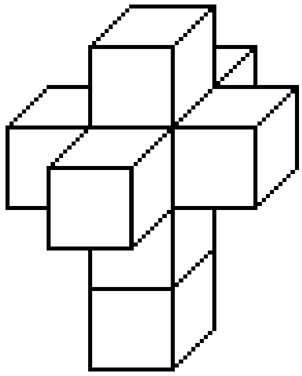
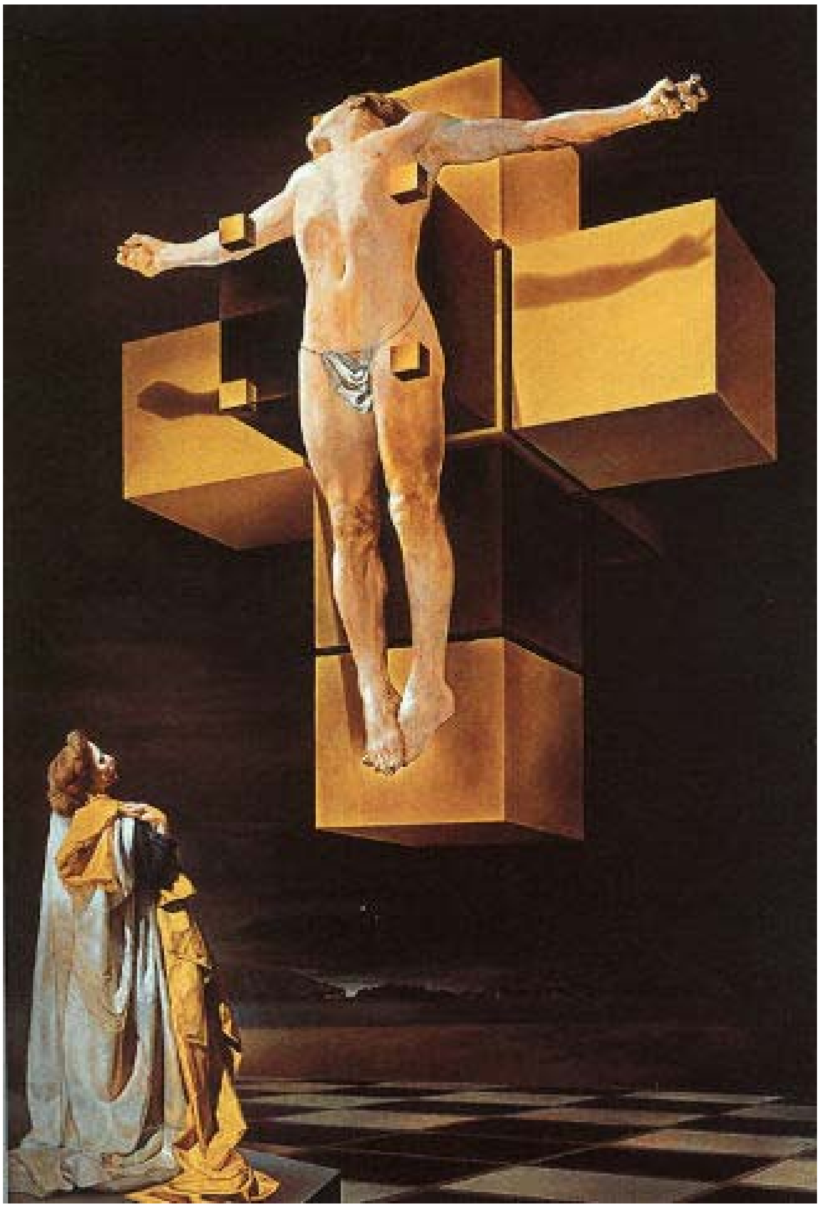


Abb. 4.3: “Faltblatt” eines Hyperkubus

Dies ist natürlich -genau wie beim Würfel-Faltplan- nur eine Möglichkeit einen Hyperkubus zu falten; insgesamt gibt es hierbei 261 Möglichkeiten. (Dieses Mal fordere ich euch nicht auf es auszuprobieren!) Als kleinen Einschub möchte ich allerdings sagen, dass dieses Gebilde viele Künstler inspiriert hat, so auch z.B. Salvador Dalí, der folgendes Bild (auf der nächsten Seite) gemalt hat. Dieses mal ein wenig größer, da ich das Bild persönlich sehr beeindruckend finde.

Nun aber weiter im Konzept der Faltungen. Mit Hilfe dieses Wissens ist es uns nun möglich, zu verstehen wie ein solcher Hyperkubus entstehen kann. Deshalb rede ich auch nicht lange um den heißen Brei, sondern mache mit dem Kapitel Hyperkubus weiter.



Salvador Dalí: Crucifixion (1954)

Inspiriert von einem Hyperkubus malte Dalí die “moderne Kreuzigung” (Crucifixion) mit Jesus und dessen Mutter Maria. (Dies stellt keine Werbung dar, sondern dient lediglich der Verknüpfung von Wissenschaft und Kunst, die man in diesem Bild sehr schön erkennen kann.)

Quelle: http://www.hayalevi.com/cgi-bin/sanatgalerisidetay.asp?resim=479

5. Der Hyperkubus II

Nachdem wir nun das Prinzip der Faltung behandelt haben, schauen wir uns am Besten eine andere Darstellung des Hyperkubus an:

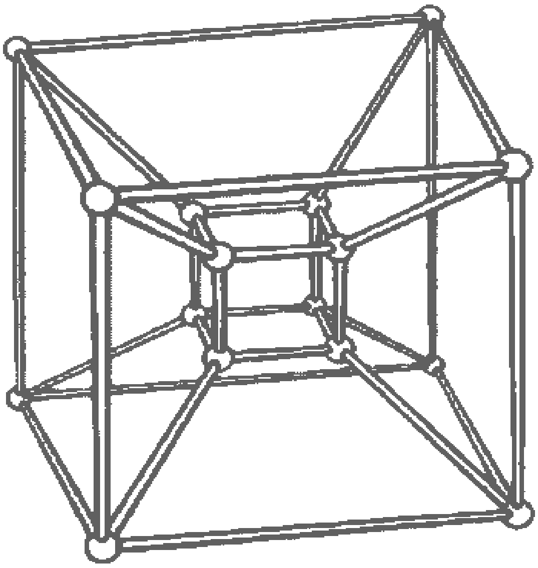


Abb. 5.1: Aufsicht eines Hyperkubus

Quelle: http://www.tordata.se/streun/math/dim4/achtzell.htm

Dies ist eine Punktdarstellung des Hyperkubus. Obwohl hier auch abstrahiert wurde, lassen sich alle 8 Bestandteile noch gut identifizieren. Dazu eine weitere Grafik die dies erleichtern soll:

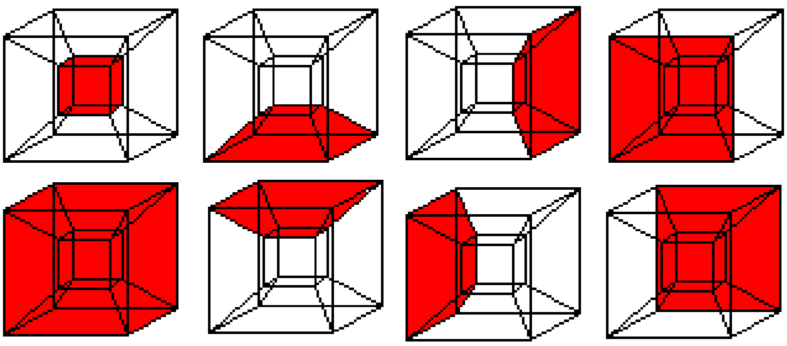


Abb. 5.2: Die einzelnen Würfel des Hyperkubus

Quelle: http://www.mathematische-basteleien.de/hyperkubus.htm

Man beachte dabei, dass kein Würfel mehr in seiner ursprünglichen Position und Form vorliegt, auch genau wie bei dem Würfel-Faltblatt. 6 Würfel sind insgesamt sehr verzerrt. Sichtbar ist auch hier allerdings nur der 3-dimensionale Teil, da wir eben nicht mehr erkennen können (dank unserem doch in diesem Fall beschränkten Gehirn). Ein Würfel ist faktisch komplett in sich selbst ineinandergefaltet (2.Reihe, 1. Würfel v.l.). Der letzte ist in sich selbst komprimiert (1. Reihe, 1. Würfel v.l.).

Ein weiteres Schrägbild des Hyperkubus möchte ich an dieser Stelle noch anführen, da es den gleichen Kubus eben nur wieder aus einem anderen Winkel zeigt; dennoch sieht er anders aus als die anderen Abbildungen:

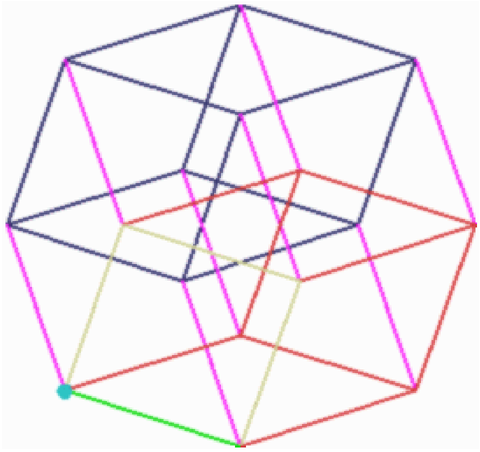


Abb. 5.3: Eine weitere Seitenansicht eines Hyperkubus
Quelle:
http://www.tordata.se/streun/math/dim4/achtzell.htm

Nach diesen vielen Darstellungen muss allerdings nochmals erwähnt werden, dass es sich immer um den gleichen Körper, den Hyperkubus handelt. Hyperkubus trifft dabei die "Oberbezeichnung" des Objektes; Tesseract nennt man meistens die "ausgefaltete" Version in Form der Schablone; Achtzell die Darstellungen aus verschiedenen Winkeln, bei denen man die Seiten eben besonders gut erkennt. Eine "vollkommen korrekte" Darstellung des Hyperkubus ist natürlich (aus mittlerweile bekannten Gründen) nicht möglich, allerdings sind diese Abstraktionen für das Verständnis des Aufbaus des 4-dimensionalen Körpers in jeder Hinsicht unerlässlich.

Zum Abschluss des Themas "Hyperkubus" möchte ich noch eine Rendergrafik eines Tesseract anbringen. Das Thema "4-dimensionale Körper" ist damit aber noch nicht abgeschlossen; weitere Beispiele folgen im nächsten Kapitel.

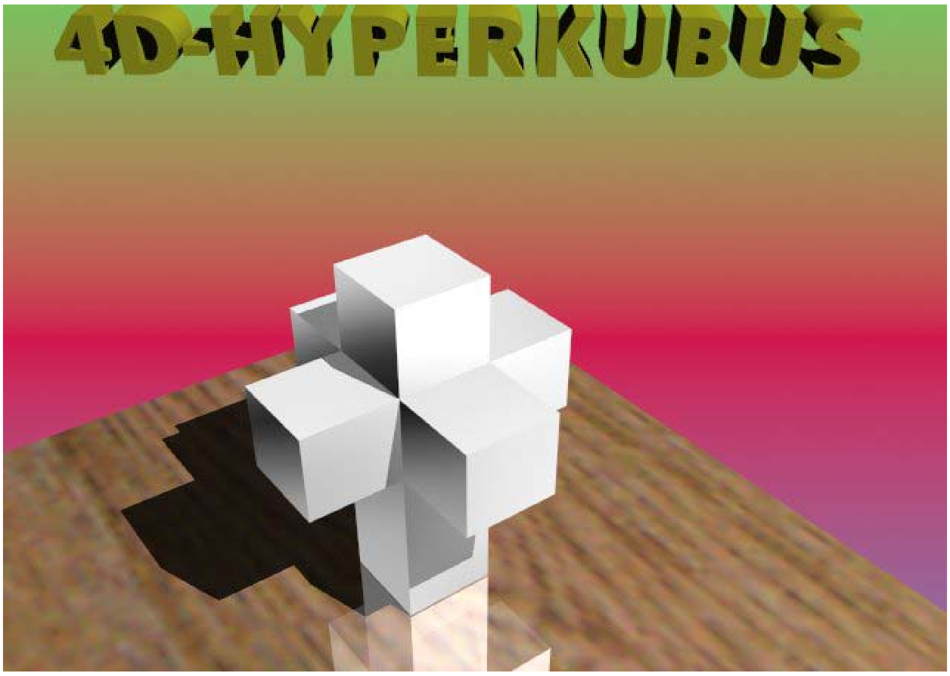


Abb. 5.4: Renderbild eines Tesseract
Quelle: http://privat.schlund.de/T/TA95/hyperkub.htm

6. Der Hypertetraeder

Zunächst wiedereinmal klären wir nicht gleich, was denn der Hypertetrader ist, sondern, da ja alles gut verständlich sein soll: Was ist ein Tetraeder?

Ein Tetraeder ist ein 3-dimensionales Gebilde mit 4 gleich großen Seitenflächen, welche miteinander verbunden sind. Daraus ergibt sich eine pyramidenähnliche Form:

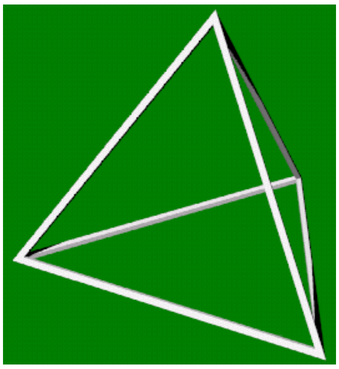


Abb. 6.1: Ein Tetraeder
Quelle: http://www.pandd.demon.nl/rhino/regveelvl.htm

Diese geometrische Form dürfte uns allen eigentlich geläufig sein. Nun gehen wir direkt einmal zur Faltung über: Wie faltet man einen Hyper...nein! Fangen wir da an, wo wir es ableiten können: Wie faltet man einen Tetraeder?

Man benötigt 4 gleiche Dreiecksflächen, welche in der 3. Dimension zusammengefaltet werden. Ich denke auch das stellt kein Problem dar, allerdings finde ich, es sollte zur besseren Übersicht nocheinmal gesagt werden. Nun zur spannenderen Frage: Was ist dann ein Hypertetraeder?

Wie beim Hyperkubus benötigt man (wie man mathematisch berechnen kann) zur Faltung eines Hypertetraeders mehr Körper als zur Faltung eines Tetraeders: Man benötigt genau 5. Auch hier betrachten wir am Einfachsten zunächst eine Projektion eines Hypertetraeders:

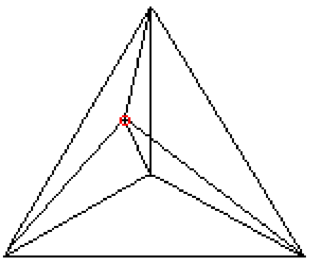


Abb. 6.2: Ein Hypertetraeder

Man kann mit ein wenig Denken und guten Augen alle 5 Objekte erkennen. Die Konstruktion einer solchen Aufsicht kann man sich am Besten vorstellen, indem man zu einem bestehenden Tetraeder einen weiteren Punkt außerhalb erstellt und diesen mit allen Ecken des Tetraeders verbindet. Man erhält so obiges Bild. Um die vorhandenen Tetraeder besser erkennen zu können, betrachten wir das nächste Bild:

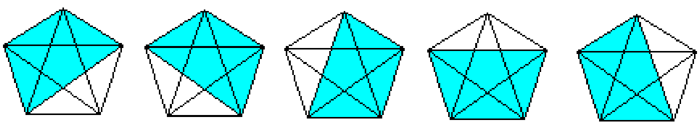


Abb. 6.3: Die einzelnen Elemente des Hypertetraeders
Quelle: http://www.mathematische-basteleien.de/hypertetraeder.htm

Was aussieht wie eine Anreihung von Pentagrammen ist in Wahrheit nur die bessere Darstellung, aus welchen Objekten der Hypertetrader “zusammengebaut” ist. Wie schon beim Hyperkubus existieren hier natürlich auch mehrere Falt-Vorlagen, wobei diese jedoch ein wenig unförmiger aussehen als bei dem Kubus. Auch das wird am Besten an Hand einer Grafik verdeutlicht:

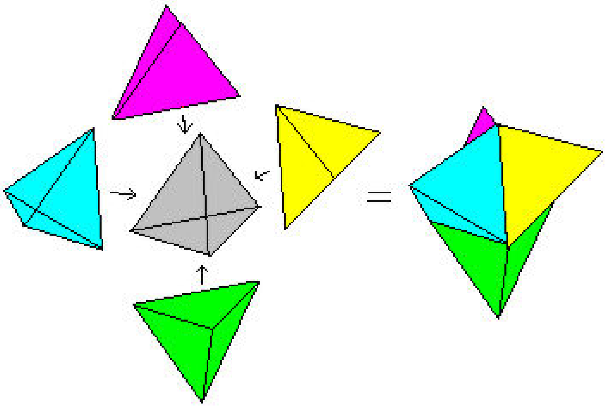


Abb. 6.4: Zusammensetzung des Hypertetraeders und entstehende Form
Quelle: http://www.mathematische-basteleien.de/hypertetraeder.htm

Man erkennt in dieser Grafik zugleich, dass die ursprünglichen Formen nur sehr zum Teil erhalten geblieben sind. Was wir sehen, ist der 3-dimensionale “Anteil” der Hypertetraeders. Damit möchte ich die Struktur des Hypertetraeders auch schon abschließen, da es hier auch mit mathematischen Fakten nichts gibt, was zum weiteren Verständnis dieses Körpers beitrüge.

7. Die Hyperkugel

Die Hyperkugel ist wohl einer der interessantesten 4-dimensionalen Körper, obwohl dieses Kapitel vermutlich recht klein wird. Dies liegt an verschiedenen Faktoren, die wir im Laufe des selbigen kennenlernen werden.

Ein Punkt davon ist, dass die Kugel nicht faltbar ist. Man kann eine Kugel einfach nicht falten, weder im 3-dimensionalen, noch im 4-dimensionalen Raum. Eine Kugel ist die Menge aller Punkte die in einem bestimmten Abstand (Radius) r zu einem Mittelpunkt M liegen, natürlich in allen Dimensionen. An dieser Stelle möchte ich -trotz vieler vorhergehender Bilder- auf ein Bild verzichten, da wohl jeder von uns in seinem Leben einmal eine Kugel gesehen hat. (Ganz nebenbei leben wir auf einer leicht abgeflachten Kugel.)

Ein weiteres Problem der Hyperkugel, ist ihre Gestalt. Ist die Hyperkugel absolut rund, d.h. hat sie keine Einbuchtungen oder Ähnliches, so ist sie sehr unspektakulär, hier deshalb ein Bild (-> deshalb verzichtete ich auch auf ein Bild weiter oben):

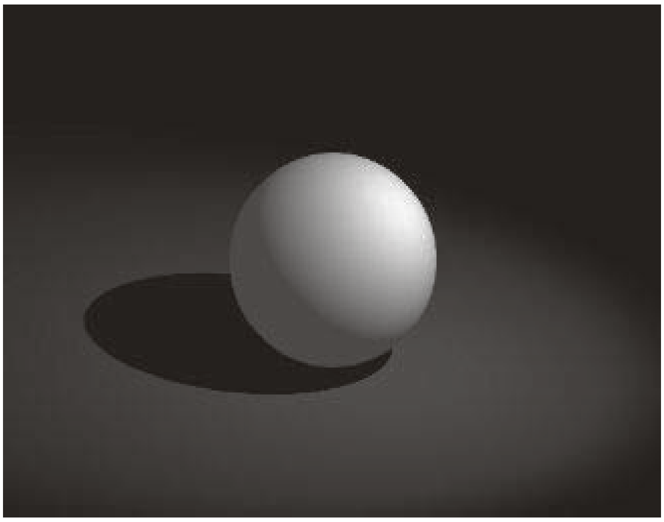


Abb. 7.1: Eine (Hyper)Kugel
Qualle: http://wwwzenger.informatik.tu-muenchen.de/lehre/vorlesungen/graphik/povray/loesung/loesung3.html

Die 3-dimensionale Darstellung einer gewöhnlichen Kugel ist also zugleich die Darstellung einer Hyperkugel. Das ist an sich doch sehr unspektakulär.

Interessanter wird das Ganze, wenn die Kugel z.B. eine Delle hat, oder -wie die Erde- abgeflacht wäre. Eine Darstellung ist dann überhaupt nicht mehr möglich, weder im Geiste, noch als Simulation, noch als Projektion. Die Hyperkugel kann dann jegliche Form und jeglichen Umriss annehmen. Bitte versucht es euch nicht vorzustellen, man bekommt davon nur Kopfschmerzen.

Leider sind das schon alle Aspekte der Hyperkugel, die nichts mit Mathematik zu tun haben, deshalb führe ich hier noch einen kleinen Vergleich an, damit man die Ausmaße einer Hyperkugel besser versteht:
Wie auch bei einer 3D-Kugel ist die 4D-Kugel die Ansammlung aller Punkte eines Radius r um einen Mittelpunkt M in allen Dimensionen, d.h. in allen 4. Trotzdem sind die Berechnungen einer Hyperkugel und einer “normalen” Kugel ziemlich verschieden:

Das Volumen einer “normalen” Kugel berechnet sich 4/3 multipliziert mit der Kreiszahl Pi (= etwa 3,14159) multipliziert mit dem quadrierten Radius:

V(3D-Kugel) = 4/3 * Pi * r^2

Eine weitere Berechnung zur 3D-Kugel wäre die Oberfläche. Diese ist berechenbar durch 4 multipliziert mit Pi multipliziert mit dem Radius zum Quadrat:

$O(3D\text{-}Kugel) = 4 * Pi * r^2$

Die Oberfläche und das Volumen einer Hyperkugel hingegen haben wesentlich größere Ausmaße. Nehmen wir das Volumen: Das Volumen einer Hyperkugel ist sehr groß, nämlich 1/2 multipliziert mit der quadrierten Kreiszahl Pi multipliziert mit dem Radius zum Quadrat multipliziert mit dem Radius zum Quadrat, d.h.

$V(4D\text{-}Kugel) = 1/2 * Pi^2 * r^2 * r^2 = 1/2 * Pi^2 * r^4$

Das Volumen ist also um ein Vielfaches größer. Ähnlich sieht es mit der Oberfläche aus. Diese ist so zu berechnen: 2 multipliziert mit Pi zum Quadrat multipliziert mit dem Radius im Kubik:

$O(4D\text{-}Kugel) = 2 * Pi^2 * r^3$

Auch die Oberfläche ist somit um einiges größer.

Dies soll nur verdeutlichen -da ich ja weitestgehends auf Mathematik verzichten wollte-, in welchen Relationen die beiden Kugeltypen zueinander stehen. Ich wiederhole deshalb noch einmal: Versucht es euch nicht vorzustellen, die Ausmaße und Formen sind gigantisch!

8. Andere 4-dimensionale Körper

Im Prinzip lässt sich zu jedem 3-dimensionalen Körper ein 4-dimensionales Gegenstück finden. Sicherlich gibt es deshalb Hyperzylinder, Hypertuben, Hypertrapeze, Hyperpyramiden, Hyperikosaeder usw... Allerdings wäre es ein sinnloses unterfangen, sie alle darstellen zu wollen, da die Menge der Körper unendlich groß ist, Komplexere Flächenberechnungen von z.B. Hyperoktaedern würden sogar den Rahmen dieses Papers sprengen. Ich begnüge mich deshalb mit den erläuterten Objekten und möchte hiermit zum Ende des Textes gelangen.

9. Nachwort

Dieser Text ist in einer sehr langen Nacht nach einem fast genausolangen Tag entstanden. Schreibfehler sind daher nicht absolut auszuschließen. Während ich diese Zeilen tippe bricht grade der Morgen an und es wird schon wieder hell - kurz gesagt: Es ist im Moment exakt 07:30. Schreibbeginn war ziemlich genau vor 5,5 Stunden. Seitdem habe ich eine halbe Packung Zigaretten und 6 Tassen Kaffee konsumiert, zusammenfassend: Mir geht es wunderbar :) Ich hoffe das Lesen des Textes hat euch so viel Spaß gemacht wie mir das Schreiben und ich hoffe, meine Gedankengänge und Erläuterungen waren nicht zu wirr.

Mein Dank gilt vor allem:

- Du-Ne, mit dem ich über solche Themen wunderbar diskutieren kann
- Azrael (z.Zt. Az[sleep]), mit dem ich bis 06:11 reden konnte und der mich durch seinen Online-Radio-Stream motiviert und wachgehalten hat
- RedDevill, der auch für solche Diskussionen immer ein offenes Ohr hat
- den Machern von google.de/.com, ohne die ich niemals an diese Informationen gekommen wäre
- [VIP]Girl für ein paar lustige Minuten/Stunden jeden Tag :)
- !gcf und den GCF, mit denen ich hoffentlich eine schöne Zeit haben werde
- und natürlich allen, die ich hier vergessen habe <u>und</u> allen, die der Meinung sind, sie sollten doch hier an dieser Stelle stehen

10. Abschließendes und Tips

Abschließendes habe ich eigentlich nichts mehr zu sagen, was nicht bereits erwähnt wurde, allerdings empfehle ich allen, die sich näher mit dieser Materie beschäftigen wollen einen Besuch bei google.de, denn “Was google nicht findet existiert nicht!” Ich verabschiede mich an dieser Stelle und wünsche allen Lesern noch einen wunderschönen guten Morgen (07:43).

Nachtrag 15:30: Ich habe mir den Text noch einmal durchgelesen und einige Schreibfehler korrigiert, er sollte nun doch (fast) fehlerfrei sein; der Inhalt ist jedoch der Gleiche ;)

“oCaS” (aka “Das_Tut”, “Das_Hut”, “Der_Hut” und sämtlichen Abwandlungen)
ocas@freakx.net
erreichbar im IRCNet in #delano, #darksaga, !gcf und #c128

Text Statistik

Characters: 20506
Words: 3490
Pages: 14
Grafiken: 18